

Lebensversicherungsmathematik
Prüfungsbeispiele
Termine 22.10.2004 - 25.6.2007
nach Themen geordnet

R. Kainhofer, Inst. f. Wirtschaftsmathematik, FAM, TU Wien

Inhaltsverzeichnis

1	Prüfungsbeispiele der schriftlichen Prüfungen	2
1	Sterblichkeit, stetige Ablebens-/Erlebensversicherungen und Renten	2
2	Er- und Ablebensversicherungen	5
3	Leibrenten	8
4	Vertragskonvertierung	10
5	Einbeziehung der Kosten	13
2	Prüfungsfragen der mündlichen Prüfungen	15
1	Zinsrechnung	15
2	Sterblichkeit, Lebenserwartung	15
3	Er- und Ablebensversicherung	15
4	Leibrenten	15
5	Nettoprämien	16
6	Deckungskapital	16
7	Umwandlung einer Versicherung	16
8	Gewinn	17
9	Verschiedene Ausscheideursachen	17
10	Schätzung von Sterbewahrscheinlichkeiten	17
3	Österreichische Sterbetafeln, Leibrententafeln 2000/02	18

Kapitel 1

Prüfungsbeispiele der schriftlichen Prüfungen

1 Sterblichkeit, stetige Ablebens-/Erlebensversicherungen und Renten

Bsp. P1.1) (22.10.2004) Es sei $\mu_{x+t} = \frac{1}{x}$ (unabhängig von t) gegeben. Berechne:

(a) ${}_t p_x$ und $\mathbb{E}[T_x]$ (1)

(b) Die Person ist ein notorischer Sammler, und die Menge an zukünftig angesammeltem Gut steigt exponentiell mit der Zeit: $S(t) = \exp(t/70)$. Berechne den Erwartungswert und die Varianz der Zufallsvariable $S(T_x)$ für eine 50-jährige Person. (2)

(c) Betrachte eine stetige Leibrente mit exponentiell abnehmenden Zahlungen

$$r(t) = \exp(-t/2).$$

Berechne bei konstanter Zinsintensität δ deren Netto-Einmalprämie. (2)

(d) Diese Leibrente soll durch stetige, zeitlich konstante Prämien über 5 Jahre finanziert werden. Wie hoch sind diese Prämien? (1)

Bsp. P1.2) (10.12.2004) Es sei $\mu_{x+t} = x$ (unabhängig von t) gegeben. Berechne:

(a) ${}_t p_x$ und $\mathbb{E}[T_x]$ (1)

(b) Betrachte eine stetige Leibrente mit exponentiell abnehmenden Zahlungen

$$r(t) = \exp(-t/2).$$

Berechne bei konstanter Zinsintensität δ deren Netto-Einmalprämie. (2)

(c) Diese Leibrente soll durch stetige, zeitlich konstante Prämien über 5 Jahre finanziert werden. Wie hoch sind diese Prämien? (2)

Bsp. P1.3) (21.1.2005) Es sei für $x \leq 120$ und $t \leq 120 - x$:

$${}_t p_x = \frac{120^2 - (x+t)^2}{120^2 - x^2}$$

(a) Bestimme allgemein μ_{x+t} und $E[T_x]$. (2)

(b) Bestimme $Var[T_x]$ für $x = 60$. (2)

- (c) Bestimme den Barwert einer allgemeinen Todesfallversicherung, wobei die Auszahlungsfunktion $r(t) = 100.000(120 - (x+t))$ linear sinkt und die Zinsintensität $\delta(t) = 0$ beträgt. (2)

Bsp. P1.4) (29.4.2005) Es sei für $a = -1$

$$\mu_{x+t} = \frac{x+t+a}{x+t}.$$

- (a) Bestimme ${}_t p_x$ sowie $\mathbb{E}[T_x]$. (2)
- (b) Bestimme den Barwert einer stetigen Leibrente mit konstanter Zahlungsintensität von 10.000€ pro Jahr an eine x -jährige Person, wenn (a) die Zinsintensität $\delta = 0$ und (b) die Zinsintensität $\delta(t) = 1$ beträgt. (2)
- (c) Bestimme den Barwert einer um 1 Jahr aufgeschobenen Ablebensversicherung mit konstanter Leistung von 10.000€ im Todeszeitpunkt, wenn keine Zinsen bezahlt werden ($\delta = 0$). (2)

Bsp. P1.5) (24.6.2005) Es sei für $x \leq 100$ und $t \leq 100 - x$:

$$\mu_{x+t} = \frac{3(x+t)^2}{100^3 - (x+t)^3}$$

- (a) Bestimme allgemein ${}_t p_x$ und $E[T_x]$. (2)
- (b) Bestimme den Barwert einer gemischten Versicherung auf 30 Jahre an eine x -jährige Person ($x < 70$), wobei die Ablebenszahlung $r(t) = 100.000/(x+t)$ beträgt und die Erlebenssumme 50.000 sein soll. Die Zinsintensität ist dabei konstant $\delta(t) = 0.05$. (4)

Bsp. P1.6) (15.12.2005) Es sei für $0 \leq x \leq 100$ und $0 \leq t \leq 100 - x$ die Überlebenswahrscheinlichkeit gegeben durch

$${}_t p_x = \frac{1}{2} \left(1 + \cos \left(\frac{\pi(x+t)}{100} \right) \right)$$

- (a) Bestimme für allgemeines Alter x die Sterbeintensität μ_{x+t} sowie die künftige Lebenserwartung $\mathbb{E}[T_x]$. (1)
- (b) Bei $\delta = 0$ bestimme die Netto-Einmalprämie einer gemischten Versicherung auf 10 Jahre (bei Auszahlung im Todeszeitpunkt), sowie die NEP einer 10-jährigen Ablebensversicherung an eine 20-jährige Person. (2)
- (c) Diese Ablebensversicherung soll durch stetige Prämien mit konstanter Intensität P über die gesamte Laufzeit finanziert werden. Bestimme $\bar{P}_{20:\overline{10}|}$. (2)

Bsp. P1.7) (26.1.2006) Betrachte eine allgemeine Leibrente an eine österreichische Frau mit folgenden jährlich vorschüssigen Auszahlungen:

< 65 Jahre	65	66	≥ 67 Jahre
0	1	2	3

Die Frau schließt diesen Vertrag im Alter von $y = 60$ Jahren ab, konstante jährliche Prämien für diese Leibrente sollen 10 Jahre lang gezahlt werden. Benutze die beiliegende österreichische Sterbe- und Leibrententafel der Volkszählung 2000/02 und einen Zins von $i = 0.03$, um folgende Aufgaben zu lösen:

- (a) Bestimme die jährlichen Prämien. (2)

- (b) Bestimme das Netto-Deckungskapital für $t = 5$ und $t = 10$. (2)
- (c) Im Alter von 67 Jahren wird diese Leibrente in eine reine Ablebensversicherung umgewandelt. Bestimme deren Ablebenssumme. (2)

Bsp. P1.8) (26.1.2006) Es ist die stetige Überlebenswahrscheinlichkeit ${}_t p_x$ gegeben durch

$${}_t p_x = e^{-(t+x)k} / e^{-xk}.$$

- (a) Bestimme symbolisch die zugehörige Sterbeintensität μ_{x+t} sowie die zukünftige Lebenserwartung $\mathbb{E}[T_x]$ einer x -jährigen Person. (2)
- (b) Es sei $k = 1/20$. Betrachte eine gemischte Versicherung (mit Ablebensleistung im Todeszeitpunkt), abgeschlossen von einer $x = 20$ -jährigen Person mit einer Laufzeit von $t = 40$ Jahren. Die Zinsintensität sei konstant $\delta = 0.03$. Bestimme die Netto-Einmalprämie dieses Vertrags. (2)
- (c) Wenn konstante, stetige Prämien über die gesamte Laufzeit bezahlt werden, bestimme deren Höhe. Vergleiche sie mit der Prämienhöhe, wenn die Prämien nur über die halbe Laufzeit bezahlt werden. (2)

Bsp. P1.9) (28.6.2006) Es sei für $0 \leq t + x \leq 100$ die Sterbeintensität gegeben als

$$\mu_{x+t} = \frac{\frac{\pi}{200} \cos\left(\frac{\pi}{200}(t+x)\right)}{1 - \sin\left(\frac{\pi}{200}(t+x)\right)}.$$

- (a) Bestimme ${}_t p_x$ sowie $\mathbb{E}[T_x]$. (2)
- (b) Bestimme den Barwert einer um 1 Jahr aufgeschobenen lebenslänglichen Ablebensversicherung mit konstanter Leistung von 1 Geldeinheit im Todeszeitpunkt, wenn keine Zinsen bezahlt werden ($\delta = 0$). (2)
- (c) Betrachte eine lebenslängliche Leibrente mit konstanter Zahlungsintensität c . Wie groß muss c sein, damit die Leibrente und die aufgeschobene Ablebensversicherung aus dem vorigen Punkt dieselbe NEP besitzen? (2)

Bsp. P1.10) (11.10.2006) Es sei für $0 \leq t + x \leq 100$ die Überlebenswahrscheinlichkeit ${}_t p_x$ gegeben als

$${}_t p_x = 1 - \sin\left(\frac{\pi}{2} \frac{x+t}{100}\right).$$

- (a) Bestimme μ_{x+t} sowie $\mathbb{E}[T_x]$. (2)
- (b) Bestimme den Barwert einer um 1 Jahr aufgeschobenen lebenslänglichen Ablebensversicherung mit konstanter Leistung von 1 Geldeinheit im Todeszeitpunkt, wenn keine Zinsen bezahlt werden ($\delta = 0$). (2)
- (c) Betrachte eine lebenslängliche Leibrente mit konstanter Zahlungsintensität c . Wie groß muss c sein, damit die Leibrente und die aufgeschobene Ablebensversicherung aus dem vorigen Punkt dieselbe NEP besitzen? (2)

Bsp. P1.11) (13.12.2006) Es sei die Sterbeintensität für eine bestimmte Bakterienkultur μ_{x+t} gegeben als

$$\mu_{x+t} = \frac{x+t}{x+t+c_1}$$

mit $c_1 > 0$.

- (a) Bestimme ${}_t p_x$! Berechne weiters für den Spezialfall $c_1 = 1$ die zukünftige Lebenserwartung $\mathbb{E}[T_x]$. (3)

- (b) Die Zinsintensität sei konstant δ . Solange die Bakterienkultur besteht, beträgt die Intensität der laufenden Kosten (=Intensität einer stetige Auszahlung) $c(t) = \exp(t + \delta t)$. Bestimme den Barwert der Kosten dieser Kultur, wenn die Laufzeit des entsprechenden Forschungsprojektes mit 3 Jahren beschränkt ist. Danach wird die Kultur kostenfrei entsorgt. (2)
- (c) Neben den laufenden Kosten ist im Fall des Todes der Kultur während der Laufzeit noch eine Entsorgungsgebühr der Höhe $e(t) = \exp(t(1 + \delta))$ zum Todeszeitpunkt t an. Wie groß sind die zum Zeitpunkt 0 zu planenden Gesamtkosten? (2)

Bsp. P1.12) (5.3.2007) Es sei für $a = 1$ die Sterbewahrscheinlichkeit gegeben als

$${}_t p_x = e^{-t} \frac{x + t^a}{x}$$

- (a) Bestimme daraus die Sterbeintensität μ_{x+t} sowie $\mathbb{E}[T_x]$. (2.5)
- (b) Bestimme die Netto-Einmalprämie einer um $k = 10$ Jahr aufgeschobenen Leibrente der Höhe H_1 an eine x -jährige Person, wenn (a) die Zinsintensität $\delta(t) = 0$ und (b) $\delta(t) = 1$ beträgt! (2.5)
- (c) Bestimme die stetige Nettoprämie einer lebenslangen Ablebensversicherung mit konstanter Leistung H_2 im Todeszeitpunkt, wenn keine Zinsen bezahlt werden ($\delta(t) = 0$). Die Prämien werden dabei ebenso lebenslang bezahlt und werden nicht verzinst. (2)

Bsp. P1.13) (25.6.2007) Es sei für $x \leq 120$ und $t \leq 120 - x$ mit einer Konstanten $k \in \mathbb{R}$:

$${}_t p_x = \frac{e^{-kt} - e^{-k(120-x)}}{1 - e^{-k(120-x)}}$$

- (a) Bestimme allgemein μ_{x+t} . (1)
- (b) Bestimme allgemein $E[T_x]$ und $Var(T_x)$. (4)
- (c) Bestimme den Barwert einer stetig ausbezahlten, lebenslänglichen Leibrente, wobei die Auszahlungsfunktion $c(t) = \exp(kt)$ exponentiell steigt und die Zinsintensität $\delta(t) = \delta \neq 0$ konstant ist. (2)

2 Er- und Ablebensversicherungen

x	l_x	d_x
30	10000	200
31	9800	400
32	9400	600
33	8800	800
34	8000	1000
35	7000	1200
36	5800	1400
37	4400	1600
38	2800	1800
39	1000	1000
40	0	

Tabelle 1.1: Steinzeit-Sterbetafel

Bsp. P2.1) (22.10.2004) Betrachte eine 3-jährige gemischte Versicherung einer 34-jährigen Person, wobei der Ablebensanteil eine jährlich steigende Versicherung mit Versicherungssumme 1 ist (also 1 im 1. Jahr, 2 im 2. Jahr, etc.) und der Erlebensanteil eine Versicherungssumme von 5 aufweist.

Unter Verwendung von $i = 0.04$ und der nebenstehenden Steinzeitsterbetafel:

- (a) Berechne die jährliche Prämie (2)
- (b) Tabelliere das Netto-Deckungskapital über die gesamte Laufzeit der Versicherung(3)

Bsp. P2.2) (10.12.2004) Betrachte eine 3-jährige gemischte Versicherung einer 33-jährigen Person, wobei der Ablebensanteil eine jährlich sinkende Versicherung mit anfänglicher Versicherungssumme 5 ist (also 5 im 1. Jahr, 4 im 2. Jahr, etc.) und der Erlebensanteil eine Versicherungssumme von 5 aufweist.

Unter Verwendung von $i = 0.03$ und der obigen Steinzeitsterbetafel (Tabelle 1.1):

- (a) Berechne die jährliche Prämie (2)
- (b) Wenn die Prämie monatlich bezahlt werden soll, wie hoch ist diese Prämie? (2)
- (c) Tabelliere das Netto-Deckungskapital über die gesamte Laufzeit der Versicherung (bei jährlicher Prämie) (3)

Bsp. P2.3) (21.1.2005) Eine 40-jährige Frau schließt eine Ablebensversicherung ab, die 200.000 € bei Tod vor dem 60. Lebensjahr auszahlt, und 100.000 € bei Tod ab dem Alter 60. Die Prämien sollen jährlich bis ans Lebensende bezahlt werden. Im Alter von 55 Jahren wird diese Versicherung in eine vorschüssige Rente ab dem 60. Lebensjahr umgewandelt (3.000 € pro Jahr).

Bei einem Zinssatz von $i = 4\%$ bestimme nach den beiliegenden Sterbe- und Rententafeln:

- (a) die Jahresprämie der Ablebensversicherung. (2)
- (b) das Nettodeckungskapital vor der Vertragsänderung. (2)
- (c) die Prämienhöhe der Rente, wenn die neuen Prämienzahlungen nur mehr bis zum Beginn der Rente laufen sollen. (3)

Bsp. P2.4) (11.3.2005) Betrachte eine allgemeine (diskrete) Ablebensversicherung an einen 35-jährigen Mann bei 5% Verzinsung:

k	0,1	2,3	4,5	≥ 6
c_k	5	3	1	0

Die 6 jährlichen Prämien sollen konstant sein ($P_0 = P_1 = \dots = P_5$). Mittels der beiliegenden österreichischen Volkssterbetafel (für Männer) bearbeite folgende Fragestellungen:

- (a) Bestimme die jährlichen Prämien P_k . (2)
- (b) Bestimme rekursiv das Deckungskapital über die gesamte Laufzeit. (2)
- (c) Tabelliere die Risiko- und die Sparprämie über die gesamte Laufzeit. (2)

Bsp. P2.5) (11.3.2005) Betrachte eine reine Ablebensversicherung an einen 25-jährigen österreichischen Mann. Die Auszahlung der Todesfallsumme 17 geschieht am Ende des Todesmonats. Bestimme mittels der beiliegenden Tafeln bei $i = 5\%$ Zins

- (a) die Netto-Einmalprämie dieser Versicherung (wenn die Prämie als Einmalzahlung erfolgen soll) (1.5)

- (b) sowie die halb-jährliche Prämie (wenn die Finanzierung durch periodische Prämien laufen soll) (2.5)
- (c) Welche Annahmen wurden dabei getroffen? (1)

Bsp. P2.6) (29.4.2005) Eine 45-jährige Frau schließt eine gemischte Versicherung der Höhe 10000 € mit der Laufzeit von 20 Jahren ab, die aber um 2 Jahre aufgeschoben ist (d.h. der Versicherungsschutz beginnt erst in 2 Jahren und läuft ab dann 20 Jahre).

Die Prämien für diese Versicherung sollen sofort beginnen und bis zum Ende der Laufzeit bezahlt werden. Der Zinssatz beträgt $i = 2.5\%$.

- (a) Bestimme die Höhe der Prämien (mit den beiliegenden Tabellen). (2)
- (b) Tabelliere das Deckungskapital für die Zeitpunkte $t = 1, 2, 3$ und 4 (2)
- (c) Bestimme das Deckungskapital nach 15 Jahren und 3 Monaten. Welche Annahme(n) wurden dabei getroffen? (2)

Bsp. P2.7) (24.6.2005) Eine österreichische Frau im Alter von 27 Jahren und 8 Monaten schließt eine lebenslängliche Ablebensversicherung der Höhe 100.000 € ab.

Mit Hilfe der beiliegenden Leibrententafeln bei 3,5% Verzinsung, löse folgende Aufgaben:

- (a) Bestimme die Netto-Einmalprämie im Zeitpunkt des Vertragsabschlusses! Welche Annahme wurde dabei gemacht? (2)
- (b) Statt einer Einmalprämie soll die Versicherung lebenslänglich durch jährliche Prämienzahlungen (jeweils am Datum des Vertragsabschlusses) finanziert werden. Bestimme diese jährliche Prämie! (2)
- (c) Bestimme das Netto-Deckungskapital in Beispiel (7b) ein Jahr nach Vertragsabschluss. (2)

Bsp. P2.8) (7.10.2005) Betrachte eine (lebenslängliche) Todesfallversicherung an einen Mann, der 22 Jahr und 4 Monate alt ist. Bei einem Zins von $i = 2.5\%$ und Auszahlung im Todeszeitpunkt bestimme die Netto-Einmalprämie dieser Versicherung, sowie die Prämienhöhe, wenn diese jährlich bezahlt werden sollen (jeweils am Jahrestag des Vertragsabschlusses). (3)

Bsp. P2.9) (15.12.2005) Betrachte eine reine Ablebensversicherung (Auszahlung am Ende des Todesjahres) auf 4 Jahre an eine 60-jährige österreichische Frau bei einem Zins von $i = 0.025$. Diese Versicherung soll durch quartalsweise Prämien finanziert werden.

- (a) Bestimme diese Prämien mittels der beiliegenden österreichischen Sterbe- und Leibrententafeln 2000/02. (2.5)
- (b) Tabelliere das Netto-Deckungskapital über die gesamte Laufzeit. (3.5)

Bsp. P2.10) (15.3.2006, 10.5.2006) Für die Erlebensversicherung (NICHT nach der beiliegenden Österreichischen Sterbetafel!) einer 40-jährigen Person auf 20 Jahre sind folgende Werte bekannt:

die jährliche Nettoprämie:	29.02
die Nettoreserve nach 10 Jahren:	370.27
die Nettoreserve nach 11 Jahren:	417.93
der Rechnungszins:	3.5%

Bestimme aus diesen Daten die einjährige Überlebenswahrscheinlichkeit der 50-jährigen Person. (2)

Bsp. P2.11) (13.12.2006) Betrachte eine (lebenslängliche) Todesfallversicherung an eine Frau, die 22 Jahre und 4 Monate alt ist. Bei einem Zins von $i = 2.5\%$ und Auszahlung im Todeszeitpunkt bestimme die Netto-Einmalprämie dieser Versicherung, sowie die Prämienhöhe, wenn diese jährlich bezahlt werden sollen (jeweils am Jahrestag des Vertragsabschlusses). (3)

Bsp. P2.12) (31.1.2007) (Versicherung der Restschuld) Ein x -jähriger Mann nimmt für den Bau eines Hauses ein Darlehen in der Höhe von 300.000 € auf, die verzinst mit Zinssatz i in 10 Jahren durch eine Einmalzahlung zurückgezahlt werden müssen. Damit im Falle seines Ablebens seine Gattin nicht durch die Schulden belastet wird, schließt er eine reine 10-jährige Ablebensversicherung ab (mit demselben Zinssatz i), welche am Ende des Todesjahres die zu diesem Zeitpunkt verbleibende Restschuld begleicht.

- (a) Bestimme die Formel für die Höhe der Netto-Einmalprämie dieser Versicherung in allgemeiner Form! (1,5)
- (b) Bestimme die Formel für die Höhe der Netto-Einmalprämie bei Benutzung der Ansatzes von De Moivre (gleichverteilter Todeszeitpunktes mit Höchstalter $\omega = 100$: $q_x = 1/(100 - x)$). Bestimme außerdem die Höhe der NEP für einen 35-jährigen österreichischen Mann mit den beiliegenden Sterbetafeln bei einem Zins von $i = 2,5\%$. (2,5)
- (c) Wenn die Ablebensversicherung am Ende des Todesmonats auszahlt, und die Prämie nicht als Einmalzahlung, sondern monatlich bezahlt werden soll, wie hoch ist diese Prämie bei einem Zins von $i = 2,5\%$? (2,5)

Bsp. P2.13) (31.1.2007) Betrachte eine lebenslängliche Ablebensversicherung der Höhe 1 an eine x -jährige Person. Die Spar- und Risikoprämie haben im Jahr k denselben Wert. Mit $q_{x+k} = 0.03$, $\ddot{a}_{x+k} = 15$ und einem Zins von $i = 0.03$ bestimme das Netto-Deckungskapital ${}_kV_x$. (2 + 2 Bonuspunkte)

Bsp. P2.14) (5.3.2007) Betrachte eine reine Erlebensversicherung und eine gemischte Versicherung, beide auf eine Laufzeit von $n = 30$ Jahren an einen $x = 30$ -jährigen österreichischen Mann. Bei einem Zins von $i = 3\%$ bestimme folgende Größen mittels der beiliegenden österreichischen Sterbe- und Leibrententafeln.

- (a) Bestimme die Spar- und die Risikoprämie im ersten Jahr, zu $t = 15$ Jahre und im letzten Versicherungsjahr! (2,5)
- (b) Bestimme das Netto-Deckungskapital der beiden Versicherungen nach dem ersten Jahr, zu $t = 15$ Jahre und am Anfang des letzten Jahres! (2,5)

3 Leibrenten

Bsp. P3.1) (21.1.2005)

- (a) Eine vorschüssige Leibrente wird von einer Frau abgeschlossen, die bei Vertragsabschluss 25 Jahre und 2 Monate alt ist. Bestimme die Netto-Einmalprämie bei Vertragsabschluss (unter Annahme a) mit $i = 4\%$. (2)
- (b) Betrachte eine allgemeine vorschüssige Leibrente mit folgenden Auszahlungen:

Alter ($x + t$)	0 – 34	35	36	≥ 37
jährliche Rente	0	1	2	3

Eine 20-jährige Frau schließt diese Rente ab. Bei $i = 5\%$ Zins, wie hoch ist die monatliche Prämie dieser Rente (bei Prämienzahlungen bis zum Tod, benutze wieder Annahme a)? Benutze die beiliegende österreichische Rententafel! (3)

Bsp. P3.2) (29.4.2005) Eine 25-jährige österreichische Frau gewinnt in einer Lotterie 1 Mio. €, die ihr in 360 **monatlichen** Raten (zu je 2777.78€^1) ausbezahlt werden. Die Zahlung endet natürlich nicht im Todesfall, sondern wird an die Erben weiterbezahlt.

- (a) Bestimme den Barwert dieser periodischen Zahlung bei einer Zinsrate von $i = 5\%$. Wie viel spart sich die Lotteriegesellschaft damit gegenüber der sofortigen Auszahlung von 1 Mio. €? (2)
- (b) Nach 10 Jahren lebt die Frau noch und beschließt, diese periodische Zahlung in eine vorschüssige Leibrente (die natürlich beim Tod endet) derselben Laufzeit umzuwandeln. Diese soll jährlich ausbezahlt werden. Benutze die beiliegenden österreichischen Sterbe- und Leibrententafeln, um die Höhe dieser Leibrente zu bestimmen. (2).
- (c) Wenn die umgewandelte vorschüssige Leibrente nicht jährlich, sondern halb-jährlich bezahlt wird, wie ändert sich die Höhe der Rente? (2)

Bsp. P3.3) (7.10.2005) Betrachte eine allgemeine vorschüssige Leibrente an einen 75-jährigen österreichischen Mann bei $i = 2.5\%$.

Jahr	$k = 0$	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$	$k \geq 5$
Auszahlung	0	0	2	3	1	0

- (a) Bestimme die Netto-Einmalprämie. (1.5)
- (b) Die Rente soll durch monatliche Prämien in den ersten beiden Jahren finanziert werden. Bestimme diese monatliche Prämie. (2)
- (c) Bestimme (bei monatlichen Prämien) rekursiv das Deckungskapital jeweils zu Jahresbeginn während der gesamten Laufzeit. (2.5)

Bsp. P3.4) (7.10.2005) Betrachte eine sofort beginnende jährlich vorschüssige Leibrente mit 10 Jahren Garantzeit an einen Mann im Alter 65 bei einem Zins von $i = 2.5\%$. D.h. in den ersten 10 Jahren wird die Rente in jedem Fall ausbezahlt, auch wenn der Mann stirbt.

Vergleiche die Netto-Einmalprämie mit der NEP einer sofort beginnenden Leibrente ohne diese Garantzeit. (3)

Bsp. P3.5) (10.5.2006) Ein 60-jähriger Mann hat am 1.5. 2006 nach den beiliegenden Tafeln eine (sofort beginnende) monatlich nachschüssige lebenslängliche Leibrente in der Höhe von 10000€ abgeschlossen. Welches Netto-Deckungskapital hat die Versicherung dafür am 31.12. 2010 zu stellen (bei $2,5\%$ Zins und unter der Annahme, dass der Mann dann noch am Leben ist)? (3)

Bsp. P3.6) (28.6.2006, 11.10.2006) Betrachte ein um 2 Jahre aufgeschobene lebenslängliche, jährlich nachschüssig ausbezahlte Leibrente an einen 30-jährigen Mann mit jährlicher Auszahlung von 1 Geldeinheit. Die Prämien sollen in der Aufschubzeit jährlich bezahlt werden.

Benutze einen technischen Zins von $2,5\%$ und die beiliegenden Sterbe- und Leibrententafeln der letzten österreichischen Volkszählung, um folgende Fragen zu beantworten:

¹Der Lotterie-Gesellschaft kostet damit der Gewinn nicht 1 Mio. €, sondern weniger, da die 1 Mio. schon die Zinsen beinhalten! Anders ausgedrückt: Der momentane Wert des Gewinnes ist deutlich weniger als 1Mio. €.

- (a) Wie hoch sind diese jährlichen Prämien? (1)
- (b) Wenn während der Aufschubzeit zusätzlich eine Prämienrückgewähr erfolgen soll, wie ändert sich die Höhe der Prämien? Die Rückgewähr läuft so ab, dass im Todesfall während der 20 Jahre Aufschubzeit die bisher einbezahlten Prämien unverzinst als Ablebensleistung am Ende des Todesjahres ausbezahlt werden. (3)
- (c) Stelle die Rekursionsgleichung für das Netto-Deckungskapital dieser aufgeschobenen Leibrente mit Rückgewähr dar! (2)

Bsp. P3.7) (25.6.2007) Eine 50-jährige österreichische Frau hat am 1.7.2003 eine halbjährlich vorschüssig ausbezahlte lebenslängliche Leibrente der Höhe 2000 € gegen eine Einmalprämie versichert. Welches Netto-Deckungskapital hat der Versicherer am 31.12.2007 zu stellen bei einem Rechnungszins von 3%? Welche Annahmen wurden bei der Berechnung getroffen? (4)

4 Vertragskonvertierung

Bsp. P4.1) (22.10.2004) Betrachte eine Erlebensfallversicherung einer 30-jährigen Frau, die bis zum Alter von 75 Jahren laufen soll. Die Versicherungssumme beträgt 10.000 €, die Prämien sollen in jährlichen Zahlungen bis zum Alter von 60 Jahren geleistet werden.

Im Alter von 50 stellt die Frau fest, dass sie doch keine so gute Pensionsvorsorge hatte, weshalb sie die Erlebensfallversicherung in eine lebenslängliche vorschüssige Rente ab dem Alter von 60 umwandeln lässt. Die Prämienzahlungen bleiben dazu unverändert.

Benutze einen technischen Zins von 3,5% und die beiliegenden Sterbe- und Leibrententafeln der letzten österreichischen Volkszählung, um folgende Fragen zu beantworten:

- (a) Wie hoch ist die Jahresprämie der Erlebensfallversicherung? (1)
- (b) Wie groß ist das Deckungskapital vor der Vertragsänderung? (2)
- (c) Wie hoch ist die jährliche Rente, welche die Frau ab 60 erhält? (3)

Bsp. P4.2) (10.12.2004) Betrachte eine gemischten Versicherung einer 30-jährigen Frau, die bis zum Alter von 65 Jahren laufen soll. Die Versicherungssumme beträgt 100.000 €, die Prämien sollen in jährlichen Zahlungen bis zum Alter von 60 Jahren geleistet werden.

Als die Frau mit 53 Jahren jedoch arbeitslos wird, entschließt sie sich, die Versicherung in eine temporäre (vorschüssige) Rente bis zu ihrem Pensionsantritt im Alter von 62 Jahren umzuwandeln. Die Prämienzahlungen bleiben dazu unverändert.

Benutze einen technischen Zins von 3% und die beiliegenden Sterbe- und Leibrententafeln der letzten österreichischen Volkszählung 2000/902, um folgende Fragen zu beantworten:

- (a) Wie hoch ist die Jahresprämie der gemischten Versicherung? (1)
- (b) Wie groß ist das Deckungskapital vor der Vertragsänderung? (2)
- (c) Wie hoch ist die jährliche Rente im Alter von 53 bis 62 Jahren? (3)

Bsp. P4.3) (11.3.2005) Ein 50-jähriger Mann schließt eine temporäre vorschüssige Leibrente (vom Betrag 1) bis zum Alter von 80 Jahren ab. Diese soll durch eine Einmalzahlung im Alter von 55 Jahren finanziert werden.

Im Alter von 60 Jahren wird die Rente umgewandelt in eine gemischte Versicherung (mit derselben Laufzeit), deren Ablebenssumme 2 beträgt. Benutze die beiliegenden österreichischen Volkssterbetafeln und Leibrententafeln, um folgende Aufgaben zu lösen (mit einem Zinssatz von $i = 5\%$):

- (a) Berechne die Einmalzahlung im Alter von 55 Jahren. (2)
- (b) Bestimme das Nettodeckungskapital direkt vor der Vertragsänderung. (2)
- (c) Bestimme die Höhe der Erlebenssumme der gemischten Versicherung nach der Umwandlung. (3)

Bsp. P4.4) (24.6.2005) Ein Frau schließt an ihrem 35. Geburtstag mit einer Erbschaft von 1 Mio. € eine lebenslängliche, monatlich vorschüssig ausbezahlte Leibrente ab. Nach genau 20 Jahren soll diese nun in eine Ablebensversicherung umgewandelt werden, deren Auszahlung im Todeszeitpunkt erfolgt.

Benutze die beiliegenden österreichischen Sterbe- und Leibrententafeln, um bei einem jährlichen Zins von 3.5% folgende Aufgaben zu lösen:

- (a) Bestimme die monatliche (bzw. jährliche) Auszahlung der Leibrente. (2)
- (b) Bestimme das Deckungskapital direkt vor der Vertragsänderung. (2)
- (c) Bestimme die Höhe der Ablebensversicherung nach der Umwandlung. (2)

Bsp. P4.5) (7.10.2005) Ein österreichischer Mann schließt im Alter von 50 Jahren eine gemischte Versicherung mit 25 Jahren Laufzeit und bei einem Zins von $i = 4\%$ ab. Deren Höhe betrage 20000 € sowohl im Er- als auch im Ablebensfall, die Prämien sollen jährlich während der gesamten Laufzeit bezahlt werden.

Der Vertrag enthält eine Klausel, dass nach 10 Jahren die Höhe der Prämien adaptiert wird an den dann aktuellen Rechnungszins².

Mit Hilfe der beiliegenden österreichischen Sterbe- und Leibrententafeln der Volkszählung 2001 beantworte folgende Fragen:

- (a) Bestimme die jährliche Prämie dieser Versicherung ohne die Zinsklausel, sowie das Deckungskapital direkt vor der automatischen Anpassung. (2)
- (b) Der aktuelle Zinssatz bei der automatischen Vertragsänderung beträgt 2.5%. Bestimme die neue Höhe der Prämien. (2)
- (c) Wenn bei der Vertragsänderung zusätzlich geändert wird, dass die Auszahlung im Todeszeitpunkt (statt am Ende des Todesjahres) erfolgt, wie hoch ist die neue jährliche Prämie. (2)

Bsp. P4.6) (15.12.2005) Eine 60-jährige Frau verkauft ihr Haus gegen eine konstante, jährliche, vorschüssige Zahlungen der Höhe 12000 € pro Jahr für 20 Jahre (wobei diese Zahlungen nicht an das Leben der Frau gebunden sind, sondern auch nach deren Tod weitergehen). Bei einem Zins von $i = 0.025$ löse folgende Aufgaben:

- (a) Bestimme den momentanen Wert dieses Hauses. (1)
- (b) Mit diesen Zahlungen als Prämie (Prämienzahlungen wie üblich nur bis zum Ende der Versicherung bzw. bis zum Tod; danach gehen etwaige Zahlungen an die Erben) schließt die Frau eine gemischte Versicherung auf 20 Jahre ab. Bestimme deren Höhe. (1)
- (c) Nach 5 Jahren möchte die Frau stattdessen lieber eine jährlich vorschüssige Leibrente bis zu ihrem Tod erhalten. Bestimme das Netto-Deckungskapital vor dieser Änderung. (2)

²Anders ausgedrückt: Die Prämie wird anfangs zwar kalkuliert mit dem Zinssatz zu Vertragsabschluss. Nach 10 Jahren wird der Vertrag aber automatisch konvertiert in eine Versicherung desselben Typs, allerdings mit neuem Zinssatz. Um dieselben Auszahlungen zu gewährleisten, muss damit die Prämie angepasst werden.

(d) Bestimme außerdem die Höhe dieser Leibrente nach der Vertragsänderung. (2)

Bsp. P4.7) (15.3.2006, 10.5.2006) Betrachte eine Ablebensversicherung eines 30-jährigen Mannes, die bis zum Alter von 75 Jahren laufen soll. Die Versicherungssumme beträgt 100.000 €, die Prämien sollen in jährlichen Zahlungen bis zum Alter von 60 Jahren geleistet werden.

Im Alter von 50 stellt der Mann fest, dass er doch keine so gute Pensionsvorsorge hatte, weshalb er die Ablebensversicherung in eine lebenslängliche vorschüssige Rente ab dem Alter von 60 umwandeln lässt. Die Prämienzahlungen bleiben dazu unverändert.

Benutze einen technischen Zins von 2,5% und die beiliegenden Sterbe- und Leibrententafeln der letzten österreichischen Volkszählung, um folgende Fragen zu beantworten:

(a) Wie hoch ist die Jahresprämie der Ablebensversicherung? (2)

(b) Wie groß ist das Deckungskapital vor der Vertragsänderung? (2)

(c) Wie hoch ist die jährliche Rente, welche der Mann ab 60 erhält? (3)

Bsp. P4.8) (28.6.2006, 11.10.2006) Ein am 1. April 1980 geborener österreichischer Mann schließt am 1. April 2000 eine Erlebensversicherung über 10.000 € auf 45 Jahre ab. Die Prämien werden jährlich vorschüssig bezahlt.

Benutze einen technischen Zins von 2,5% und die beiliegenden Sterbe- und Leibrententafeln der letzten österreichischen Volkszählung, um folgende Fragen zu beantworten:

(a) Wie hoch ist die Jahresprämie der Erlebensversicherung? (2)

(b) Wie groß ist das Deckungskapital am 1. Juli 2006? (2)

(c) Nach 10 Jahren soll die Versicherung ohne Prämienänderung in eine gemischte Versicherung derselben Laufzeit umgewandelt werden, wobei Ab- und Erlebenssumme gleich groß sind. Bestimme diese! (2)

Bsp. P4.9) (13.12.2006) Eine 40-jährige Frau schließt eine Ablebensversicherung ab, die 200.000 € bei Tod vor dem 60. Lebensjahr auszahlt, und 100.000 € bei Tod ab dem Alter 60. Die Prämien sollen jährlich bis ans Lebensende bezahlt werden. Im Alter von 55 Jahren wird diese Versicherung in eine nachschüssige Rente ab dem 60. Lebensjahr umgewandelt (3.000 € pro Jahr).

Bei einem Zinssatz von $i = 2.5\%$ bestimme nach den beiliegenden Sterbe- und Rententafeln:

(a) die Jahresprämie der Ablebensversicherung. (2)

(b) das Nettodeckungskapital vor der Vertragsänderung. (3)

(c) die Prämienhöhe der Rente, wenn die neuen Prämienzahlungen nur mehr bis zum Beginn der Rente laufen sollen. (3)

Bsp. P4.10) (31.1.2007) Ein österreichischer Mann im Alter $x = 30$ schließt eine gemischte Versicherung der Höhe 10.000 € auf 20 Jahre ab, die durch jährliche Prämien über 10 Jahre bezahlt werden soll. Bei einem Zinssatz von $i = 3\%$ beantworte folgende Fragen:

(a) Wie hoch sind die jährlichen Prämien? (1)

(b) Bestimme ${}_{10}V_x$, sowie daraus rekursiv ${}_{11}V_x$ und ${}_{12}V_x$. (2)

(c) Nach Ablauf der 10 Jahre Prämienzahlung, beschließt der Mann, noch 5 weitere Jahre dieselbe Prämie zu bezahlen, um die Erlebensfall-Leistung zu erhöhen (die Ablebensleistung bleibt weiterhin 10.000 €!). Wie hoch ist diese neue Auszahlung?(2)

(d) Bestimme das DK ${}_{10}V'_x$ und ${}_{11}V'_x$ dieser modifizierten Versicherung! (1)

Bsp. P4.11) (5.3.2007) Die lebenslängliche Ablebensversicherung eines x -jährigen ist gegen eine lebenslängliche Prämie abgeschlossen, die in den ersten 5 Versicherungsjahren doppelt so hoch ist, als während der restlichen Versicherungsdauer.

Nach Ablauf von 15 Jahren wird die Versicherung in eine gemischt Versicherung des nunmehr $(x + 15)$ -jährigen umgewandelt, mit einer restlichen Laufzeit von 10 Jahren. Die Versicherungssumme soll dabei verdoppelt werden. Während dieser neuen Laufzeit sind gleichbleibende jährliche Prämien ab dem Umwandlungstag zu bezahlen.

Bestimme in allgemeinen Formeln mit nicht näher spezifiziertem Zins i , Alter x und Versicherungshöhe H :

(a) Die ausreichende Prämie der ursprünglichen Versicherung bei Kosten α , β und γ . (2)

(b) Das ausreichende Deckungskapital am Umwandlungstag, wobei sowohl die prospektive als auch die retrospektive Darstellung angegeben werden soll. (2)

(c) Die ab der Umwandlung zu bezahlende ausreichende Prämie. (2)

(d) *Bonusbeispiel: Zeige die Gleichheit der pro- und der retrospektiven Darstellung des Deckungskapitals aus Aufgabe 11b.* (2 Bonuspunkte)

Bsp. P4.12) (25.6.2007) Eine 40-jährige Frau schließt eine Ablebensversicherung ab, die 50.000€ bei Tod vor dem 60. Lebensjahr auszahlt, und 100.000€ bei Tod ab dem Alter 60. Die Prämien sollen jährlich bis ans Lebensende bezahlt werden. Im Alter von 55 Jahren wird diese Versicherung in eine vorschüssige Rente ab dem 65. Lebensjahr umgewandelt (3.000€ pro Jahr).

Bei einem Zinssatz von $i = 3\%$ bestimme nach den beiliegenden Sterbe- und Rententafeln:

(a) die Jahresprämie der Ablebensversicherung. (2)

(b) das Nettodeckungskapital vor der Vertragsänderung. (3)

(c) die Prämienhöhe der Rente, wenn die neuen Prämienzahlungen nur mehr bis zum Beginn der Rente laufen sollen. (3)

5 Einbeziehung der Kosten

Bsp. P5.1) (26.1.2006) Betrachte eine reine Ablebensversicherung an eine 20-jährige österreichische Frau mit einer Laufzeit von 30 Jahren, wobei die Ablebensleistung von 1 am Ende des Todesmonats ausbezahlt wird. Benutze die beiliegende österreichische Sterbe- und Leibrententafel 2000/02 und einen Zinssatz von $i = 0.03$.

(a) Bestimme die Netto-Einmalprämie dieser Versicherung. Was sind die Annahmen für die benutzten Formeln? (3)

(b) Die (konstanten) Prämien sollen über die gesamte Laufzeit monatlich bezahlt werden. Bestimme diese monatlichen Prämien. (1)

(c) Bei Fixkosten von $\alpha = 0.05$ und (monatlichen) Administrationskosten $\gamma = 0.01$, bestimme die ausreichende Monatsprämie. (2)

Bsp. P5.2) (15.3.2006, 10.5.2006) Betrachte eine temporäre Leibrente an einen 60-jährigen österreichischen Mann mit einer Laufzeit von 20 Jahren, wobei die Rente monatlich vorschüssig ausbezahlt wird. Benutze die beiliegende österreichische Sterbe- und Leibrententafel 2000/02 und einen Zinssatz von $i = 0.025$.

- (a) Bestimme die Netto-Einmalprämie dieser Versicherung. Was sind die Annahmen für die benutzten Formeln? (2)
- (b) Die (konstanten) Nettoprämien sollen über die ersten 10 Jahre monatlich bezahlt werden. Bestimme diese Prämien. (2)
- (c) Bei Fixkosten von $\alpha = 0.1$, (monatlichen) Inkassokosten von 0.05 und (monatlichen) Administrationskosten $\gamma = 0.03$, bestimme die ausreichende Monatsprämie. (2)
- (d) Anstatt diese Leibrente als sofort beginnend zu betrachten mit einer Prämienzahlungsdauer von 10 Jahren kann man im Fall ohne Einbeziehung der Kosten diese Rente auch als um 10 Jahre aufgeschobene Leibrente ansehen, deren Prämien um exakt die Rentenhöhe reduziert sind (beide liefern dieselben Zahlungen!) Ohne Kosten sind diese beiden Betrachtungsweisen äquivalent. Gilt dies auch mit Kosten? (1+1 Bonus)

Bsp. P5.3) (31.1.2007) Ein österreichischer Mann im Alter von 22 Jahren und 6 Monaten schließt eine lebenslängliche Ablebensversicherung ab, die durch jährliche Prämien bezahlt werden soll. Die Abschlusskosten seien $\alpha = 0.05$, die Verwaltungskosten $\gamma = 0.03$, für Inkassokosten wird kein Beitrag verrechnet ($\beta = 0$). Bestimme für einen Zinssatz von $i = 0,03$ die Höhe der jährlichen Prämien! Welche Annahmen wurden dabei benutzt? (4)

Kapitel 2

Prüfungsfragen der mündlichen Prüfungen

1 Zinsrechnung

- unterjährige Verzinsung; effektiver Zinssatz; Übergang zu Zinsintensität
- Vorauszinssatz
- Barwert von ewigen und Zeitrenten; steigende/fallende Renten
- Was ist Immunisierung, Duration, Konvexität?

2 Sterblichkeit, Lebenserwartung

- Sterbewahrscheinlichkeit als bedingte Verteilung
- Sterbeintensität und Zusammenhang mit -wahrscheinlichkeit, Sterbedichte
- gestutzte Restlebensdauer, Verteilung, Varianz (Voraussetzungen?), Ab-/Unabhängigkeit von K_x und S_x
- Annahmen über die unterjährige Sterblichkeit
- Was sind Perioden- und Generationentafeln?

3 Er- und Ablebensversicherung

- Auszahlung im Todeszeitpunkt: Zusammenhang mit Auszahlung am Ende des Todesjahres (Voraussetzungen, Formel)
- Allgemeine stetige ALV, Rückführung auf diskreten Fall
- Rekursionsgleichungen, DG im stetigen Fall

4 Leibrenten

- Zusammenhang mit Ablebensversicherung
- Unterjährige Zahlung: Form der NEP, Approximationen (Voraussetzungen?)

- Stetige Leibrenten
- Rekursionsgleichungen, Was ist das Anerbe? Thiele'sche Differentialgleichung für stetige Renten
- Nicht ganzzahliges Eintrittsalter: Wie sieht die NEP aus? Herleitung? Approximation (Voraussetzungen?)

5 Nettoprämien

- Worauf basiert die Bestimmung der Nettoprämien?
- Ist für die Versicherung eine Einmal- oder jährliche Prämie besser? Mathematische Begründung!
- Definition der allgemeinen Versicherung
- Was ist die Prämienrückgewähr? Wie sieht die Bestimmung der Prämie aus?
- Welche Arten von Kosten kennen Sie? Charakteristika?
- Wie sieht die ausreichende Prämie aus?
- Was sind Rechnungsgrundlagen 1. und 2. Ordnung?
- Wie kann sich eine Versicherung bei der Kalkulation gegen statistische Schwankungen und adverse Entwicklungen in der Zukunft absichern?

6 Deckungskapital

- Was ist das Deckungskapital (Definition)? Wofür wird es benötigt?
- Welche Darstellungsarten des DK gibt es?
- Stellen Sie das DK einer allgemeinen Versicherung auf beide Arten dar!
- Rekursive Darstellung des DK, am Beispiel einer allgemeinen Versicherung
- Was sind die Risiko- und die Sparprämie? Wie werden sie hergeleitet?
- Ist es möglich, dass das DK immer gleich 0 ist?
- Wie sieht das ausreichende DK aus? Welche Terme beinhaltet es?
- Wie kann der totale Verlust auf die einzelnen Versicherungsjahre verteilt werden?
- Was ist der Satz von Hattendorf? Beweis? Gibt es Voraussetzungen?
- Wie sieht die Varianz des totalen Verlustes aus? (Anwendung des Satz v.H.)

7 Umwandlung einer Versicherung

- Wie läuft die Umwandlung einer Versicherung ab?

8 Gewinn

- Prämien wurden ja aus Äquivalenzprinzip bestimmt. Wodurch ergibt sich trotzdem ein Gewinn für die Versicherung? Welche Arten gibt es?
- Wie sieht der technische Gewinn im Jahr k aus? Auf welche Arten kann er aufgeteilt werden (Zins- und Sterblichkeitsgewinn)?
- Welche Arten der Gewinnbeteiligung gibt es?

9 Verschiedene Ausscheideursachen

- Wie wird in Österreich das System einer Pensionsversicherung modelliert?
- Bei verschiedenen Ausscheideursachen, wie sehen die Sterbeintensitäten aus?
- Wie lautet die Verteilung auf die einzelnen Todesursachen, gegeben den Todeszeitpunkt?
- Darstellung des DK bei mehreren Ausscheideursachen

10 Schätzung von Sterbewahrscheinlichkeiten

- Definition der Exposure
- Wie sieht der klassische Schätzer für die Sterbewahrscheinlichkeiten aus den Beobachtungsdaten aus? Annahmen, Approximationen?
- Wie sieht der alternative Schätzer für die \hat{q}_x aus? Annahmen: m Perioden, linear innerhalb Periode.
- Wie sieht der ML-Schätzer für \hat{q}_x aus? Herleitung?
- Wie lässt sich ein Konfidenzintervall für \hat{q}_x angeben?
- Wie lässt sich am besten Testen, ob eine Beobachtung einer gegebenen Sterblichkeit entspricht?
- Normalverteilungs-Approximation für die $D = \sum D_x$

Kapitel 3

Österreichische Sterbetafeln, Leibrententafeln 2000/02

Sterbetafel 2000/02 für Österreich

Genaus Alter (am x-ten Geburts- tag) in Jahren	Männliches Geschlecht						Weibliches Geschlecht						Genaus Alter (am x-ten Geburts- tag) in Jahren
	Sterbe- wahr-schein- lichkeit im Alters- intervall x bis x+1	Über- lebende im Alter x	Gestorbene im Alters- intervall x bis x+1	Von den Überlebenden im Alter x		Fernere Lebens- erwartung im Alter x in Jahren	Sterbe- wahr-schein- lichkeit im Alters- intervall x bis x+1	Über- lebende im Alter x	Gestorbene im Alters- intervall x bis x+1	Von den Überlebenden im Alter x		Fernere Lebens- erwartung im Alter x in Jahren	
				bis x+1	insgesamt					bis x+1	insgesamt		
				noch zu durch- lebende Jahre									
x	q(x)	l(x)	d(x)	L(x)	T(x)	e(x)	q(x)	l(x)	d(x)	L(x)	T(x)	e(x)	x
1	0,0053430	100000	534	99531	7550969	75,51	0,0037607	100000	376	99670	8147559	81,48	1
2	0,0003452	99466	34	99449	7451438	74,91	0,0003266	99624	33	99608	8047889	80,78	2
3	0,0002639	99431	26	99418	7351989	73,94	0,0002108	99591	21	99581	7948282	79,81	3
4	0,0001984	99405	20	99395	7252571	72,96	0,0001318	99570	13	99564	7848701	78,83	4
5	0,0001512	99385	15	99378	7153176	71,97	0,0000997	99557	10	99552	7749137	77,84	5
6	0,0001295	99370	13	99364	7053798	70,98	0,0000858	99547	9	99543	7649585	76,84	6
7	0,0001226	99358	12	99351	6954434	69,99	0,0000851	99539	8	99535	7550042	75,85	7
8	0,0001170	99345	12	99340	6855083	69,00	0,0000900	99530	9	99526	7450507	74,86	8
9	0,0001106	99334	11	99328	6755743	68,01	0,0000926	99521	9	99517	7350981	73,86	9
10	0,0001114	99323	11	99317	6656415	67,02	0,0000934	99512	9	99508	7251464	72,87	10
11	0,0001138	99312	11	99306	6557098	66,03	0,0000962	99503	10	99498	7151957	71,88	11
12	0,0001130	99300	11	99295	6457792	65,03	0,0001015	99493	10	99488	7052459	70,88	12
13	0,0001150	99289	11	99283	6358497	64,04	0,0001097	99483	11	99478	6952971	69,89	13
14	0,0001428	99278	14	99271	6259213	63,05	0,0001293	99472	13	99466	6853493	68,90	14
15	0,0002217	99264	22	99253	6159943	62,06	0,0001669	99459	17	99451	6754027	67,91	15
16	0,0003679	99242	37	99223	6060690	61,07	0,0002082	99443	21	99432	6654576	66,92	16
17	0,0005631	99205	56	99177	5961467	60,09	0,0002483	99422	25	99410	6555143	65,93	17
18	0,0007744	99149	77	99111	5862290	59,13	0,0002988	99397	30	99383	6455734	64,95	18
19	0,0009476	99072	94	99025	5763129	58,17	0,0003345	99368	33	99351	6356351	63,97	19
20	0,0010207	98978	101	98928	5664154	57,23	0,0003380	99334	34	99318	6257000	62,99	20
21	0,0010268	98877	102	98827	5565226	56,28	0,0003234	99301	32	99285	6157682	62,01	21
22	0,0010239	98776	101	98725	5466399	55,34	0,0003082	99269	31	99254	6058397	61,03	22
23	0,0010166	98675	100	98625	5367674	54,40	0,0002973	99238	30	99223	5959144	60,05	23
24	0,0010061	98574	99	98525	5269049	53,45	0,0002831	99209	28	99195	5859920	59,07	24
25	0,0009997	98475	98	98426	5170524	52,51	0,0002698	99181	27	99167	5760726	58,08	25
26	0,0009973	98377	98	98328	5072098	51,56	0,0002695	99154	27	99141	5661559	57,10	26
27	0,0009856	98279	97	98230	4973770	50,61	0,0002799	99127	28	99113	5562418	56,11	27
28	0,0009627	98182	95	98135	4875540	49,66	0,0002906	99099	29	99085	5463305	55,13	28
29	0,0009286	98087	91	98042	4777405	48,71	0,0003004	99071	30	99056	5364220	54,15	29
30	0,0008961	97996	88	97952	4679364	47,75	0,0003092	99041	31	99026	5265164	53,16	30
31	0,0008793	97908	86	97865	4581411	46,79	0,0003225	99010	32	98994	5166139	52,18	31
32	0,0008905	97822	87	97779	4483546	45,83	0,0003531	98978	35	98961	5067144	51,19	32
33	0,0009343	97735	91	97690	4385767	44,87	0,0003966	98943	39	98924	4968183	50,21	33
34	0,0009913	97644	97	97596	4288077	43,92	0,0004510	98904	45	98882	4869260	49,23	34
35	0,0010528	97547	103	97496	4190482	42,96	0,0005000	98859	49	98835	4770378	48,25	35
36	0,0011164	97444	109	97390	4092986	42,00	0,0005394	98810	53	98783	4671543	47,28	36
37	0,0011973	97336	117	97277	3995596	41,05	0,0005850	98757	58	98728	4572760	46,30	37
38	0,0013159	97219	128	97155	3898318	40,10	0,0006533	98699	64	98667	4474032	45,33	38
39	0,0014696	97091	143	97020	3801163	39,15	0,0007412	98635	73	98598	4375365	44,36	39
40	0,0016474	96949	160	96869	3704143	38,21	0,0008412	98561	83	98520	4276767	43,39	40
41	0,0018400	96789	178	96700	3607275	37,27	0,0009502	98478	94	98432	4178247	42,43	41
42	0,0020376	96611	197	96512	3510575	36,34	0,0010633	98385	105	98333	4079816	41,47	42
43	0,0022378	96414	216	96306	3414063	35,41	0,0011789	98280	116	98222	3981483	40,51	43
44	0,0024482	96198	236	96080	3317757	34,49	0,0012999	98164	128	98101	3883261	39,56	44
45	0,0026829	95963	257	95834	3221676	33,57	0,0014259	98037	140	97967	3785160	38,61	45
46	0,0029503	95705	282	95564	3125842	32,66	0,0015650	97897	153	97820	3687193	37,66	46
47	0,0032555	95423	311	95267	3030278	31,76	0,0017304	97744	169	97659	3589373	36,72	47
48	0,0035965	95112	342	94941	2935011	30,86	0,0019207	97575	187	97481	3491713	35,79	48
49	0,0039826	94770	377	94581	2840070	29,97	0,0021238	97387	207	97284	3394232	34,85	49
50	0,0044224	94393	417	94184	2745489	29,09	0,0023362	97180	227	97067	3296948	33,93	50
51	0,0049170	93975	462	93744	2651305	28,21	0,0025657	96953	249	96829	3199882	33,00	51
52	0,0054561	93513	510	93258	2557561	27,35	0,0028073	96705	271	96569	3103052	32,09	52
53	0,0060208	93003	560	92723	2464303	26,50	0,0030534	96433	294	96286	3006484	31,18	53
54	0,0065971	92443	610	92138	2371580	25,65	0,0032958	96139	317	95980	2910198	30,27	54
55	0,0071772	91833	659	91504	2279442	24,82	0,0035351	95822	339	95653	2814217	29,37	55
56	0,0077607	91174	708	90820	2187938	24,00	0,0037768	95483	361	95303	2718665	28,47	56
57	0,0083568	90466	756	90088	2097118	23,18	0,0040245	95123	383	94931	2623262	27,58	57
58	0,0089745	89710	805	89308	2007029	22,37	0,0042739	94740	405	94537	2528331	26,69	58
59	0,0096238	88905	856	88477	1917722	21,57	0,0045302	94335	427	94121	2433794	25,80	59
60	0,0103254	88050	909	87595	1829244	20,78	0,0048119	93907	452	93682	2339672	24,91	60
61	0,0111153	87141	969	86656	1741649	19,99	0,0051423	93456	481	93215	2245991	24,03	61
62	0,0120316	86172	1037	85654	1654993	19,21	0,0055330	92975	514	92718	2152776	23,15	62
63	0,0131064	85135	1116	84577	1569339	18,43	0,0059968	92461	554	92183	2060058	22,28	63
64	0,0143678	84019	1207	83416	1484762	17,67	0,0065535	91906	602	91605	1967875	21,41	64
65	0,0158211	82812	1310	82157	1401346	16,92	0,0072130	91304	659	90975	1876270	20,55	65
66	0,0174507	81502	1422	80791	1319189	16,19	0,0079820	90645	724	90283	1785295	19,70	66
67	0,0192473	80080	1541	79309	1238398	15,46	0,0088790	89922	798	89522	1695012	18,85	67
68	0,0212140	78538	1666	77705	1159099	14,76	0,0099125	89123	883	88682	1605489	18,01	68
69	0,0233625	76872	1796	75974	1081384	14,07	0,0110837	88240	978	87751	1516808	17,19	69
70	0,0257042	75076	1930	74111	1005410	13,39	0,0124070	87262	1083	86720	1429057	16,38	70
71	0,0282537	73147	2067	72173	931298	12,73	0,0139145	86179	1199	85580	1342336	15,58	71
72	0,0310362	71080	2206	69977	859185	12,09	0,0156392	84980	1329	84316	1256757	14,79	72
73	0,0340867	68874	2348	67700	789208	11,46	0,0176233	83651	1474	82914	1172441	14,02	73
74	0,0374562	66526	2492	65280	721508	10,85	0,0199112	82177	1636	81359	1089527	13,26	74
75	0,0412038	64034	2638	62715	656228	10,25	0,0225567	80541	1817	79632	1008169	12,52	75
76	0,0453985	61396	2787	60002	593512	9,67	0,0256061	78724	2016	77716	928536	11,79	76
77	0,0501132	58609	2937	57140	533510	9,10	0,0291105	76708	2233	75992	850820	11,09	77
78	0,0554263	55672	3086	54129	476370	8,56	0,0331236	74475	2467	73242	775229	10,41	78
79	0,0614277	52586	3230	50971	422241	8,03	0,0377085	72008	2715	70651	701987	9,75	79
80	0,0682233	49356	3367	47672	371271	7,52	0,0429438	69293	2976	67805	631337	9,11	80
81	0,0759351	45988											

Barwerte einer lebenslang vorschüssigen Rente vom Betrag 1 nach der Sterbetafel 2000/2002

Genaueres Alter in Jahren	Zinsfuß												
	0,0%	0,5%	1,0%	1,5%	2,0%	2,5%	3,0%	3,5%	4,0%	4,5%	5,0%	5,5%	6,0%
0	76,012	62,998	52,981	45,178	39,027	34,121	30,162	26,931	24,266	22,045	20,174	18,585	17,222
1	75,415	62,643	52,783	45,082	38,996	34,131	30,198	26,983	24,327	22,110	20,241	18,652	17,288
2	74,440	61,972	52,319	44,759	38,769	33,971	30,085	26,902	24,268	22,067	20,210	18,629	17,271
3	73,466	61,293	51,846	44,427	38,535	33,805	29,965	26,816	24,206	22,021	20,176	18,603	17,252
4	72,474	60,607	51,364	44,087	38,293	33,631	29,840	26,724	24,139	21,972	20,139	18,575	17,230
5	71,485	59,914	50,876	43,740	38,045	33,452	29,710	26,629	24,068	21,919	20,099	18,545	17,207
6	70,494	59,216	50,381	43,386	37,791	33,268	29,575	26,529	23,994	21,863	20,056	18,512	17,181
7	69,503	58,515	49,881	43,027	37,531	33,079	29,436	26,426	23,916	21,804	20,012	18,478	17,154
8	68,511	57,809	49,376	42,663	37,266	32,884	29,292	26,319	23,836	21,743	19,965	18,441	17,126
9	67,518	57,099	48,865	42,293	36,996	32,685	29,144	26,208	23,752	21,679	19,915	18,402	17,095
10	66,525	56,386	48,349	41,917	36,720	32,481	28,992	26,093	23,664	21,612	19,863	18,361	17,063
11	65,533	55,669	47,828	41,535	36,438	32,272	28,835	25,974	23,574	21,542	19,808	18,318	17,028
12	64,540	54,949	47,301	41,148	36,151	32,057	28,673	25,851	23,479	21,469	19,751	18,273	16,992
13	63,548	54,225	46,770	40,755	35,858	31,837	28,506	25,724	23,381	21,392	19,691	18,225	16,953
14	62,556	53,499	46,234	40,357	35,560	31,612	28,336	25,593	23,280	21,313	19,628	18,175	16,913
15	61,570	52,773	45,697	39,956	35,259	31,385	28,162	25,460	23,176	21,232	19,564	18,124	16,871
16	60,592	52,051	45,160	39,555	34,957	31,156	27,987	25,325	23,072	21,150	19,499	18,072	16,830
17	59,626	51,335	44,627	39,155	34,656	30,927	27,812	25,191	22,967	21,068	19,435	18,021	16,789
18	58,671	50,626	44,097	38,758	34,356	30,699	27,638	25,057	22,864	20,988	19,372	17,971	16,749
19	57,726	49,921	43,569	38,360	34,055	30,470	27,463	24,922	22,760	20,907	19,309	17,922	16,710
20	56,784	49,216	43,039	37,959	33,751	30,238	27,285	24,785	22,653	20,824	19,244	17,871	16,670
21	55,841	48,507	42,503	37,552	33,440	30,000	27,101	24,643	22,543	20,738	19,176	17,817	16,627
22	54,898	47,793	41,961	37,139	33,123	29,755	26,912	24,495	22,427	20,647	19,104	17,760	16,582
23	53,952	47,075	41,413	36,718	32,799	29,504	26,717	24,342	22,307	20,552	19,029	17,700	16,533
24	53,006	46,352	40,858	36,290	32,467	29,246	26,515	24,184	22,182	20,452	18,949	17,636	16,482
25	52,058	45,625	40,297	35,856	32,129	28,981	26,306	24,019	22,051	20,348	18,866	17,569	16,427
26	51,109	44,893	39,730	35,414	31,783	28,709	26,092	23,848	21,915	20,239	18,778	17,497	16,368
27	50,158	44,156	39,155	34,964	31,430	28,430	25,870	23,671	21,773	20,124	18,685	17,422	16,309
28	49,206	43,413	38,574	34,507	31,068	28,143	25,641	23,488	21,625	20,004	18,587	17,342	16,242
29	48,250	42,665	37,985	34,041	30,698	27,848	25,403	23,296	21,470	19,878	18,484	17,257	16,171
30	47,293	41,911	37,389	33,567	30,319	27,543	25,158	23,097	21,308	19,745	18,374	17,166	16,096
31	46,334	41,151	36,785	33,085	29,932	27,231	24,905	22,891	21,138	19,606	18,259	17,070	16,016
32	45,374	40,388	36,175	32,595	29,537	26,911	24,644	22,677	20,963	19,460	18,138	16,969	15,931
33	44,415	39,622	35,560	32,099	29,135	26,583	24,376	22,457	20,781	19,309	18,012	16,863	15,842
34	43,459	38,854	34,940	31,597	28,726	26,249	24,101	22,230	20,592	19,152	17,880	16,752	15,748
35	42,503	38,083	34,316	31,088	28,310	25,907	23,819	21,996	20,397	18,989	17,743	16,636	15,649
36	41,550	37,310	33,686	30,574	27,888	25,559	23,530	21,755	20,196	18,819	17,600	16,515	15,545
37	40,598	36,535	33,053	30,053	27,458	25,203	23,234	21,508	19,988	18,644	17,451	16,388	15,436
38	39,650	35,760	32,416	29,528	27,023	24,840	22,931	21,253	19,773	18,462	17,296	16,255	15,323
39	38,707	34,985	31,777	28,998	26,582	24,472	22,622	20,993	19,553	18,275	17,136	16,118	15,205
40	37,770	34,212	31,136	28,465	26,137	24,099	22,308	20,727	19,327	18,082	16,971	15,976	15,082
41	36,837	33,439	30,493	27,929	25,687	23,720	21,987	20,455	19,095	17,883	16,800	15,829	14,954
42	35,910	32,668	29,849	27,388	25,232	23,336	21,661	20,177	18,857	17,679	16,624	15,676	14,822
43	34,989	31,898	29,203	26,844	24,772	22,945	21,329	19,893	18,613	17,469	16,442	15,518	14,684
44	34,072	31,128	28,555	26,296	24,307	22,549	20,990	19,602	18,363	17,252	16,254	15,354	14,540
45	33,161	30,361	27,905	25,745	23,837	22,147	20,645	19,305	18,106	17,029	16,060	15,084	14,391
46	32,256	29,595	27,255	25,190	23,363	21,740	20,294	19,002	17,842	16,800	15,860	15,009	14,237
47	31,358	28,832	26,604	24,633	22,885	21,328	19,938	18,692	17,573	16,565	15,654	14,827	14,077
48	30,468	28,072	25,953	24,075	22,403	20,912	19,576	18,378	17,299	16,324	15,442	14,641	13,911
49	29,586	27,316	25,304	23,514	21,918	20,491	19,210	18,058	17,018	16,078	15,224	14,448	13,741
50	28,713	26,565	24,656	22,953	21,432	20,067	18,840	17,733	16,733	15,826	15,002	14,251	13,565
51	27,850	25,820	24,010	22,393	20,943	19,640	18,466	17,405	16,443	15,570	14,775	14,049	13,385
52	26,997	25,081	23,368	21,833	20,454	19,211	18,088	17,072	16,149	15,309	14,543	13,842	13,200
53	26,155	24,348	22,728	21,273	19,963	18,779	17,708	16,735	15,850	15,044	14,306	13,631	13,011
54	25,322	23,620	22,091	20,714	19,471	18,345	17,323	16,394	15,547	14,773	14,064	13,414	12,816
55	24,497	22,898	21,456	20,155	18,976	17,907	16,934	16,048	15,238	14,497	13,817	13,191	12,615
56	23,681	22,179	20,822	19,594	18,479	17,465	16,541	15,697	14,924	14,214	13,563	12,962	12,408
57	22,872	21,464	20,189	19,032	17,979	17,019	16,142	15,339	14,603	13,925	13,302	12,727	12,195
58	22,070	20,753	19,557	18,468	17,475	16,568	15,738	14,975	14,275	13,629	13,034	12,484	11,974
59	21,275	20,045	18,924	17,902	16,968	16,112	15,327	14,605	13,940	13,326	12,759	12,233	11,745
60	20,487	19,340	18,293	17,335	16,458	15,652	14,911	14,228	13,598	13,015	12,475	11,974	11,509
61	19,706	18,638	17,662	16,766	15,944	15,187	14,489	13,845	13,249	12,697	12,184	11,708	11,265
62	18,934	17,943	17,033	16,198	15,428	14,719	14,063	13,456	12,894	12,372	11,887	11,435	11,013
63	18,172	17,253	16,409	15,631	14,912	14,249	13,634	13,064	12,534	12,042	11,583	11,155	10,755
64	17,422	16,573	15,790	15,067	14,398	13,778	13,202	12,668	12,170	11,707	11,274	10,869	10,491
65	16,686	15,902	15,178	14,507	13,885	13,308	12,771	12,270	11,804	11,368	10,961	10,580	10,222
66	15,965	15,243	14,574	13,953	13,376	12,839	12,339	11,872	11,436	11,027	10,645	10,286	9,949
67	15,258	14,595	13,979	13,405	12,872	12,374	11,908	11,473	11,066	10,684	10,326	9,989	9,672
68	14,567	13,959	13,393	12,864	12,371	11,911	11,479	11,075	10,696	10,339	10,004	9,689	9,392
69	13,892	13,335	12,816	12,331	11,876	11,451	11,052	10,677	10,325	9,993	9,681	9,386	9,108
70	13,232	12,724	12,249	11,804	11,387	10,995	10,626	10,280	9,954	9,646	9,355	9,081	8,821</

Barwerte einer lebenslang vorschüssigen Rente vom Betrag 1 nach der Sterbetafel 2000/2002

Genaueres Alter in Jahren	Zinsfuß												
	0.0%	0.5%	1.0%	1.5%	2.0%	2.5%	3.0%	3.5%	4.0%	4.5%	5.0%	5.5%	6.0%
	b) weiblich												
0	81.977	67.140	55.880	47.226	40.487	35.172	30.927	27.495	24.687	22.362	20.418	18.774	17.371
1	81.283	66.721	55.638	47.096	40.429	35.159	30.942	27.526	24.727	22.408	20.466	18.822	17.419
2	80.309	66.071	55.203	46.803	40.230	35.024	30.850	27.463	24.684	22.379	20.446	18.809	17.410
3	79.326	65.410	54.756	46.500	40.023	34.882	30.752	27.395	24.637	22.345	20.422	18.792	17.398
4	78.336	64.741	54.301	46.188	39.809	34.734	30.648	27.323	24.586	22.309	20.396	18.773	17.384
5	77.344	64.066	53.839	45.871	39.589	34.580	30.541	27.247	24.532	22.270	20.368	18.753	17.369
6	76.350	63.387	53.372	45.548	39.364	34.423	30.430	27.168	24.475	22.229	20.338	18.730	17.352
7	75.357	62.704	52.901	45.220	39.135	34.261	30.315	27.086	24.416	22.186	20.306	18.707	17.335
8	74.363	62.018	52.424	44.887	38.901	34.096	30.197	27.001	24.355	22.142	20.274	18.683	17.317
9	73.370	61.329	51.943	44.549	38.663	33.927	30.076	26.914	24.291	22.095	20.239	18.657	17.297
10	72.377	60.636	51.458	44.207	38.420	33.753	29.951	26.823	24.225	22.046	20.203	18.630	17.277
11	71.384	59.940	50.967	43.859	38.172	33.575	29.823	26.730	24.156	21.996	20.165	18.601	17.255
12	70.391	59.241	50.472	43.506	37.919	33.393	29.690	26.633	24.085	21.943	20.125	18.571	17.232
13	69.399	58.539	49.972	43.149	37.661	33.206	29.554	26.533	24.011	21.887	20.084	18.540	17.208
14	68.407	57.834	49.468	42.787	37.400	33.016	29.415	26.430	23.935	21.830	20.041	18.507	17.183
15	67.419	57.128	48.961	42.420	37.134	32.821	29.272	26.325	23.856	21.771	19.996	18.473	17.156
16	66.432	56.420	48.451	42.050	36.864	32.624	29.126	26.217	23.775	21.710	19.950	18.438	17.129
17	65.449	55.711	47.937	41.677	36.590	32.422	28.977	26.106	23.692	21.648	19.902	18.401	17.101
18	64.468	55.001	47.421	41.299	36.313	32.218	28.825	25.992	23.607	21.583	19.853	18.364	17.073
19	63.489	54.289	46.901	40.917	36.031	32.009	28.670	25.875	23.519	21.517	19.803	18.325	17.043
20	62.510	53.574	46.375	40.530	35.744	31.795	28.509	25.755	23.428	21.447	19.750	18.284	17.011
21	61.530	52.854	45.844	40.136	35.450	31.575	28.344	25.630	23.332	21.374	19.693	18.241	16.977
22	60.549	52.129	45.306	39.735	35.150	31.349	28.173	25.499	23.233	21.298	19.634	18.195	16.941
23	59.567	51.400	44.763	39.328	34.844	31.117	27.996	25.364	23.129	21.217	19.572	18.146	16.902
24	58.583	50.666	44.213	38.914	34.530	30.878	27.814	25.224	23.021	21.133	19.506	18.094	16.861
25	57.599	49.928	43.657	38.493	34.210	30.634	27.626	25.079	22.908	21.045	19.436	18.039	16.818
26	56.614	49.186	43.095	38.065	33.884	30.383	27.432	24.928	22.790	20.953	19.363	17.981	16.771
27	55.630	48.440	42.528	37.632	33.551	30.126	27.233	24.773	22.668	20.856	19.287	17.920	16.722
28	54.645	47.691	41.955	37.192	33.211	29.863	27.027	24.612	22.542	20.756	19.207	17.856	16.670
29	53.662	46.939	41.377	36.746	32.865	29.593	26.816	24.446	22.410	20.651	19.123	17.788	16.615
30	52.678	46.183	40.793	36.293	32.513	29.317	26.599	24.274	22.273	20.542	19.035	17.717	16.557
31	51.695	45.423	40.204	35.834	32.153	29.034	26.376	24.096	22.131	20.428	18.943	17.642	16.496
32	50.712	44.661	39.610	35.369	31.788	28.745	26.146	23.913	21.984	20.309	18.847	17.563	16.432
33	49.732	43.897	39.012	34.899	31.416	28.450	25.911	23.724	21.832	20.186	18.746	17.481	16.364
34	48.754	43.131	38.409	34.423	31.038	28.149	25.670	23.530	21.675	20.058	18.642	17.396	16.293
35	47.778	42.363	37.802	33.941	30.654	27.842	25.422	23.331	21.513	19.926	18.534	17.306	16.219
36	46.803	41.592	37.190	33.453	30.264	27.528	25.169	23.125	21.345	19.788	18.420	17.212	16.141
37	45.830	40.819	36.574	32.959	29.866	27.207	24.908	22.912	21.171	19.645	18.302	17.114	16.059
38	44.859	40.044	35.953	32.460	29.463	26.879	24.642	22.694	20.992	19.497	18.179	17.011	15.973
39	43.892	39.269	35.329	31.955	29.054	26.546	24.369	22.470	20.807	19.344	18.051	16.904	15.883
40	42.928	38.492	34.701	31.446	28.639	26.207	24.090	22.240	20.617	19.185	17.919	16.793	15.789
41	41.968	37.716	34.071	30.932	28.219	25.861	23.806	22.005	20.421	19.022	17.782	16.678	15.692
42	41.012	36.938	33.437	30.414	27.792	25.510	23.515	21.763	20.219	18.853	17.639	16.558	15.590
43	40.059	36.161	32.800	29.890	27.361	25.153	23.218	21.515	20.011	18.678	17.492	16.433	15.483
44	39.110	35.383	32.160	29.362	26.923	24.789	22.914	21.261	19.798	18.498	17.339	16.303	15.372
45	38.164	34.604	31.516	28.828	26.479	24.418	22.603	21.000	19.577	18.311	17.181	16.167	15.256
46	37.222	33.825	30.870	28.290	26.029	24.041	22.286	20.732	19.351	18.119	17.016	16.027	15.135
47	36.285	33.046	30.221	27.747	25.574	23.658	21.963	20.458	19.118	17.920	16.846	15.881	15.009
48	35.353	32.268	29.570	27.201	25.114	23.269	21.633	20.178	18.879	17.716	16.671	15.729	14.879
49	34.426	31.491	28.917	26.650	24.648	22.875	21.298	19.892	18.634	17.505	16.489	15.572	14.743
50	33.504	30.716	28.262	26.096	24.178	22.474	20.956	19.599	18.382	17.288	16.302	15.410	14.601
51	32.588	29.941	27.605	25.538	23.702	22.067	20.607	19.299	18.124	17.065	16.108	15.242	14.454
52	31.677	29.168	26.947	24.976	23.222	21.655	20.252	18.993	17.859	16.835	15.908	15.067	14.302
53	30.771	28.395	26.287	24.410	22.735	21.236	19.891	18.680	17.587	16.598	15.702	14.886	14.143
54	29.869	27.623	25.624	23.840	22.243	20.811	19.522	18.359	17.307	16.354	15.488	14.698	13.978
55	28.972	26.851	24.959	23.265	21.745	20.378	19.145	18.030	17.020	16.102	15.266	14.503	13.805
56	28.078	26.079	24.290	22.685	21.240	19.938	18.760	17.693	16.724	15.841	15.036	14.300	13.625
57	27.187	25.306	23.618	22.099	20.728	19.490	18.367	17.347	16.419	15.572	14.797	14.088	13.437
58	26.300	24.533	22.942	21.507	20.209	19.033	17.965	16.992	16.104	15.293	14.550	13.867	13.239
59	25.415	23.758	22.262	20.909	19.683	18.568	17.553	16.627	15.780	15.004	14.292	13.637	13.033
60	24.533	22.982	21.579	20.306	19.149	18.094	17.132	16.252	15.446	14.705	14.024	13.396	12.816
61	23.654	22.206	20.892	19.697	18.607	17.612	16.702	15.867	15.101	14.396	13.746	13.145	12.590
62	22.780	21.431	20.203	19.083	18.059	17.122	16.263	15.473	14.747	14.076	13.457	12.885	12.354
63	21.912	20.657	19.512	18.465	17.505	16.625	15.816	15.070	14.383	13.747	13.159	12.614	12.108
64	21.050	19.886	18.820	17.844	16.947	16.121	15.361	14.659	14.010	13.409	12.851	12.334	11.852
65	20.195	19.118	18.129	17.220	16.384	15.612	14.899	14.240	13.629	13.061	12.534	12.044	11.587
66	19.350	18.355	17.440	16.596	15.818	15.098	14.431	13.813	13.239	12.706	12.209	11.745	11.312
67	18.514	17.598	16.753	15.972	15.249	14.580	13.958	13.381	12.843	12.342	11.874	11.437	11.029
68	17.690	16.848	16.070	15.349	14.680	14.059	13.481	12.942	12.440	11.971	11.532	11.122	10.737
69	16.877	16.106	15.391	14.727	14.110	13.535	12.999	12.499	12.031	11.593	11.183	10.798	10.437
70	16.076	15.372	14.718	14.108	13.540	13.010	12.514	12.051	11.616	11.209	10.826	10.467	10.129
71	15.289	14.648	14.050	13.493	12.971	12.484	12.027	11.599	11.197	10.819	10.463	10.129	9.813
72	14.516	13.934	13.390	12.881	12.405	11.958	11.538	11.144	10.773	10.424	10.094	9.784	9.490
73	13.758	13.232	12.739	12.276	11.842	11.433	11.049	10.687	10.346	10.025	9.720	9.433	9.161
74	13.018	12.543	12.097	11.678	11.283	10.911	10.561	10.230	9.918	9.622	9.343	9.078	8.826
75	12.295	11.868	11.466	11.088	10.731	10.394	10.075	9.774	9.488	9.218	8.962	8.718	8.487
76	11.592	11.209	10.849	10.508	10.186	9.882	9.593	9.319	9.060	8.814	8.580	8.357	8.145
77	10.909	10.568	10.246	9.940	9.651	9.377	9.116	8.869	8.634	8.410	8.197	7.994	7.801
78	10.249												